

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ КУТРИТОВ

Ю.И. Богданов<sup>1)</sup>, Л.А. Кривицкий<sup>\*1)</sup>, С.П. Кулик<sup>\*1)</sup>, М.В. Чехова<sup>\*1)</sup>

ОАО «Ангстрем» им. А.И. Шокина, 124460 Москва, Зеленоград

\*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992 ГСП-2, Москва

### АННОТАЦИЯ

Технология измерения квантовых состояний представляет интерес с фундаментальной точки зрения, поскольку дает инструмент для анализа таких базовых понятий квантовой теории как принципиально статистический характер ее предсказаний, принцип суперпозиции, принцип дополнительности Н.Бора и др. Настоящая работа посвящена восстановлению состояний оптических трехуровневых систем. Такие состояния получаются в поляризационном представлении частотно- и пространственно-вырожденного двухфотонного поля. Необходимость в правильном измерении квантовых состояний таких систем имеет важное прикладное значение в связи с перспективой увеличения секретности распределения ключа в квантовой криптографии при переходе от двухуровневых квантовых систем- кубитов к трехуровневым системам - кутритам. В работе развит метод статистического оценивания квантовых состояний на основе решения уравнения правдоподобия и анализа статистических свойств получаемых оценок. Используя корневой метод оценки квантовых состояний, по измеренным моментам четвертого порядка по полю восстановлена исходная волновая функция бифотонов- кутритов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая информатика представляет собой новую, быстро развивающуюся область науки и технологии, основанную на использовании квантовых систем для реализации принципиально новых методов передачи сообщений и вычислений (квантовые каналы связи, квантовая криптография, квантовый компьютер) [1,2].

---

<sup>1</sup> тел. (095) 532-8096; e-mail: bogdanov@angstrem.ru; postmast@qopt.phys.msu.su

Принципиальное преимущество квантовых каналов связи по сравнению с классическими заключается в их качественно более высоком уровне защиты: совершенный квантовый канал (без шума) имеет, в принципе, абсолютную защиту, поскольку любая попытка вмешательства в систему сразу же обнаруживается (квантовый канал связи можно разрушить, но невозможно вскрыть).

В то же время, на пути создания эффективных систем обработки квантовой информации стоит ряд трудных проблем, среди которых, пожалуй, основная – это «хрупкость» и «неуловимость» квантового состояния- основного объекта квантовой физики и соответственно квантовой информатики.

Квантовое состояние характеризуется так называемым вектором состояния (другие названия: пси- функция, волновая функция, амплитуда состояния). Вектор состояния, представляющий собой комплексный вектор в абстрактном гильбертовом пространстве, описывает амплитуды вероятностей наблюдения соответствующих базисных состояний.

Вектор состояния является носителем информации принципиально отличным от своих классических собратьев. Две наиболее важные отличительные черты квантовых систем по сравнению с классическими – это принципиальная необходимость статистического описания их поведения, а также взаимная дополнительность различных квантовых измерений, которые, согласно принципу дополнительности Н.Бора, не могут быть совмещены одновременно в одной экспериментальной реализации.

*Статистическое поведение квантовых систем.* Измерение, проводимое над индивидуальным квантовым объектом, приводит к разрушению его квантового состояния (редукция волновой функции). Это обстоятельство приводит к необходимости статистического (ансамблевого) подхода: каждый акт измерения сопровождается разрушением квантового состояния микрообъекта, однако у экспериментатора в распоряжении имеется не единичный объект, а ансамбль [3]. В силу отмеченной «хрупкости» и «неуловимости» квантового состояния, правильнее будет говорить, что вектор состояния описывает не отдельный объект, а квантовый статистический ансамбль.

***Взаимная дополнительность измерений.*** Квантовая механика является вероятностной теорией особого рода, в которой для статистически полного описания совокупности (ансамбля) необходимо проводить эксперименты во взаимно дополнительных условиях (например, пространственно – временная картина должна быть дополнена импульсно - энергетической). Для того, чтобы различные представления были взаимно согласованы, эта теория должна говорить не на языке вероятностей, а на языке «их корней» - амплитуд вероятностей [4].

В силу принципиально статистического характера поведения квантовых объектов, особую роль в квантовой информатике приобретает обратная задача статистики (другой термин – квантовая томография). Под обратной задачей статистики (томографией) понимается восстановление неизвестного состояния квантового статистического ансамбля по измерениям, проводимым на отдельных его представителях.

Томография играет ключевую роль при реализации всех трех основных взаимосвязанных задач, с которыми сталкивается разработчик квантовых информационных систем: генерация квантовых систем в определенных квантовых состояниях; их преобразование в процессе передачи по квантовому каналу связи или в процессе квантовых вычислений; считывание (измерение) выходного состояния системы.

В настоящей работе мы будем опираться на так называемый корневой метод оценки квантовых состояний [5-7]. Этот метод специально разработан для анализа взаимно-дополнительных измерений<sup>2</sup>. Преимущества рассматриваемого метода связаны с возможностью восстановления состояний в гильбертовом пространстве высокой размерности, а также с установлением фундаментальных пределов на точность восстановления неизвестного квантового состояния. При использовании асимптотически эффективных алгоритмов может быть достигнута точность восстановления, близкая к фундаментальному пределу. Теоретические и экспериментальные исследования по реализации методов квантовой томографии в экспериментах с бифотонными состояниями [8], показали существенно более

---

<sup>2</sup> в смысле принципа дополнительности Н.Бора.

высокий уровень точности и надежности разработанных методов и алгоритмов по сравнению с ранее известными [9]

До сих пор основные теоретические разработки и попытки их реализации были основаны на использовании кубитов - состояний квантовой двухуровневой системы. На сегодняшний день кубит - основной элемент квантовых информационных технологий: подавляющее большинство алгоритмов передачи, хранения, обработки и защиты квантовой информации основано именно на кубитах. Использование многоуровневых квантовых систем даст существенные преимущества (по сравнению с системами на кубитах) при реализации основных протоколов квантовой информации. Так, важное преимущество многоуровневых систем может быть получено уже при переходе от кубитов к кутритам (т.е. от двух-уровневых систем к системам с тремя базисными состояниями). В качестве кутритов могут выступать поляризационные состояния бифотонного поля.

В 1999 году появилась первая работа, посвященная поляризационным преобразованиям кутриов- бифотонов [10]. Хотя в этой работе и не было осуществлено произвольное преобразование кутритов (которое описывается алгеброй  $SU(3)$ ), там экспериментально демонстрировались несколько базисных состояний, а также их некоторые частные преобразования. Именно на эту работу ссылались авторы нового протокола квантовой криптографии [11], приводя пример реальной трехуровневой системы.

Основанный на кутритах протокол, предложенный в [11], приводит к увеличению размерности пространства базисных состояний (12 для кутритов, по сравнению с 4 - для кубитов) и обеспечивает большую секретность, а также увеличивает объем передаваемой информации при использовании меньших ресурсов (по сравнению с традиционными кубитовыми протоколами).

В 2002-ом году был собран прототип измерительной установки по томографии кутритов [12]. В 2003 году была продемонстрирована возможность восстановления квантовых состояний кутритов с высокой точностью [8]. Наиболее близким аналогом установки [8, 12] может служить томографическая схема по измерению бифотонно-кубитов, которая была разработана и реализована в Лос- Аламосской национальной лаборатории (США) [9]. Исследовалась двухкубитовая система, когда каждый кубит

представлялся поляризационным состоянием бифотона в двух пространственно-невырожденных модах, что не всегда удобно при передаче информации. Метод восстановления неизвестных квантовых состояний, реализованный в [9], является существенно более громоздким по сравнению с [8] и, в то же время, имеет существенно более низкую точность. Кроме того, рассматриваемый метод (в отличие от [8]) не допускает решения задач в пространствах высокой размерности. Отметим также, что в [9] не была проведена минимизация числа измерений.

## 2. БИФОТОНЫ КАК ТРЕХУРОВНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Бифотонное поле представляет собой когерентную смесь двухфотонных фоковских состояний  $|1_{\vec{k}}, 1_{\vec{k}'}\rangle$  и вакуумного  $|vac\rangle$  состояния [13]:

$$|\Psi\rangle = |vac\rangle + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} F_{\vec{k}, \vec{k}'} |1_{\vec{k}}, 1_{\vec{k}'}\rangle, \quad (1)$$

где коэффициенты  $F_{\vec{k}, \vec{k}'}$  называются амплитудами бифотонов, а  $|1_{\vec{k}}, 1_{\vec{k}'}\rangle$  обозначает состояние с одним (сигнальным) фотоном в моде  $\vec{k} \equiv \vec{k}_s$  и одним (холостым) фотоном в моде  $\vec{k}' \equiv \vec{k}_i$ . Будем рассматривать коллинеарный и вырожденный режим, когда  $\vec{k}_s \approx \vec{k}_i$  и  $\omega_s \approx \omega_i \approx \omega_p/2$ ,  $\omega_s + \omega_i = \omega_p$ , где  $\omega_p$  - частота лазерной накачки. Методика приготовления, преобразования и измерения этих состояний подробно изложена в работах [10,12,14]. Исходное состояние, подлежащее измерению и последующему восстановлению, имеет следующий вид:

$$|\Psi\rangle = c_1|2,0\rangle + c_2|1,1\rangle + c_3|0,2\rangle \quad (2)$$

В (2) использовано представление поляризационного состояния двухфотонного света (1) в фоковском базисе. Например, запись  $|2,0\rangle$  означает, что оба фотона находятся в горизонтальной ( $H$ ) поляризационной моде, а в вертикальной моде ( $V$ ) фотонов нет.

Состояние (2) трехуровневой системы в квантовой теории информации, как уже отмечалось выше, получило название *кутрит*. Идея приготовления и измерения таких состояний предложена в [12, 14]. Система регистрации бифотонов-кутритов

состоит из светоделителя и пары детекторов, выходы которых соединены со схемой совпадений фотоотсчетов (Рис.1).

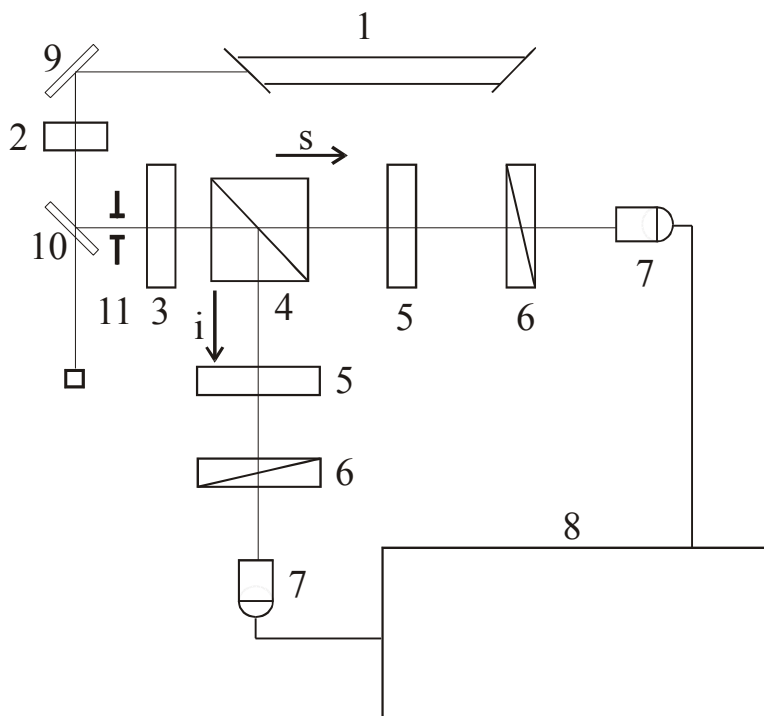


Рис.1. Схема экспериментальной установки.

1 - Аргоновый лазер ( $\lambda_p = 351 \text{ нм}$ ); 2 – кристалл иодата лития, в котором происходит генерация бифотонов с центральной длиной волны  $702 \text{ нм}$ ; 3 – задающая кварцевая пластинка с параметрами ( $\alpha, \delta = 32.82$ ); 4 - светоделитель, направляющий (условно) сигнальные фотоны направо, а холостые – вниз; 5 – четвертьволновые пластинки ( $\chi_{s,i}, \delta = \pi/4$ ); 6 – поляризационные призмы ( $\gamma_{s,i}$ ); 7 – детекторы, работающие в режиме счета фотонов; 8 – схема парных совпадений; 9 – поворотное зеркало; 10 – зеркало, пропускающее излучение на длине волны  $351 \text{ нм}$  и отражающее излучение на длине волны  $702 \text{ нм}$ ; 11 – диафрагма, осуществляющая пространственную селекцию мод.

Зарегистрированным событием считается появление импульса на выходе схемы совпадения. Примерно в половине всех случаев один из фотонов (условно, сигнальный), составляющих бифотон, направляется к одному детектору, а другой (холостой) - ко второму. В остальных случаях оба фотона попадают в одно плечо светоделителя - такие события не регистрируются, поскольку они не приводят к совпадениям. Поляризационные преобразования осуществляются с помощью

четвертьволновой пластинки и поляризационной призмы, установленными перед каждым детектором. В [12, 14] было показано, что если состояние кутрита неизвестно, то необходимо выполнить девять проекционных измерений моментов для полного воссоздания исходного состояния, которое в общем случае является смешанным. Эти моменты имеют вид:

$$R_{s,i} \sim \left\langle (b'_s)^\dagger (b'_i)^\dagger b'_s b'_i \right\rangle = R(\chi_s, \gamma_s, \chi_i, \gamma_i) \quad (3)$$

где  $(b'_j)^\dagger, b'_j$  - операторы рождения и уничтожения фотонов в сигнальной и холостой модах  $j = s, i$  после преобразования, а  $\chi_j, \gamma_j$  - параметры установки - углы ориентации пластинок и поляроидов, соответственно.

Таблица 1.

v	Параметры экспериментальной установки				Амплитуда процесса $M_v$
	$\chi_{s1}$	$\gamma_s$	$\chi_{i1}$	$\gamma_i$	
1.	0°	-90°	0°	-90°	$M_1 = \frac{c_1}{\sqrt{2}}$
2.	0°	-90°	0°	0°	$M_2 = \frac{c_2}{2}$
3.	0°	0°	0°	0°	$M_3 = \frac{c_3}{\sqrt{2}}$
4.	45°	0°	0°	0°	$M_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}c_2 - \frac{i}{2}c_3$
5.	45°	-45°	0°	0°	$M_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}}c_2 - \frac{1}{2}c_3$
6.	45°	-45°	0°	-90°	$M_6 = \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}c_2$
7.	45°	0°	0°	-90°	$M_7 = \frac{1}{2}c_1 - \frac{i}{2\sqrt{2}}c_2$
8.	-45°	-22.5°	45°	22.5°	$M_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}}c_1 + \frac{i}{2\sqrt{2}}c_3$
9.	-45°	-45°	45°	45°	$M_9 = \frac{1}{2\sqrt{2}}c_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}c_3$

Время, в течение которого проводилось измерение каждого из девяти моментов, являлось одним из параметров эксперимента - обычно оно составляло 100мс. Отдельное измерение повторялось трижды - каждый раз по 700-800 усреднений, после чего схема перенастраивалась - углы  $\chi_j, \gamma_j$  устанавливались в соответствии с томографическим протоколом (Таблица 1) и цикл повторялся.

Таким образом, выходными данными измерительной установки являлись средние скорости числа совпадений фотоотчетов в единицу времени  $R_{1,2,\dots,9}$ . Чтобы иметь возможность сравнить результаты процедуры восстановления с параметрами входных состояний, которые должны быть известны с высокой точностью, мы использовали следующий способ их приготовления. Бифотоны получались в процессе коллинеарного частотно-вырожденного спонтанного параметрического рассеяния в кристалле иодата лития. Поляризация обоих рождающихся фотонов была вертикальная, т.е. генерировалось состояние

$$|c'\rangle = |0,2\rangle \quad (4)$$

Далее это состояние преобразовывалось с помощью пластинки из кристаллического кварца, толщина которой была задана и составляла  $h = 824 \pm 1 \text{ мкм}$ . При повороте пластинки в плоскости, ортогональной падающему пучку бифотонов - в этой плоскости лежала оптическая ось пластинки - состояние (2) преобразовывалось по правилу:

$$|c\rangle_{in} = G|c'\rangle \quad (5)$$

где матрица

$$G = \begin{pmatrix} t^2 & \sqrt{2}tr & r^2 \\ -\sqrt{2}tr^* & |t|^2 - |r|^2 & \sqrt{2}t^*r \\ r^{*2} & -\sqrt{2}t^*r^* & t^{*2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

описывает действие пластинки с эффективными коэффициентами пропускания  $t$  и отражения  $r$ :

$t = \cos \delta + i \sin \delta \cos 2\alpha$ ,  $r = i \sin \delta \sin 2\alpha$ . Здесь введена оптическая толщина

$\delta = \pi |n_o - n_e| h / \lambda$  и угол  $\alpha$  между оптической осью пластинки и вертикалью. Для



кристаллического кварца на длине волны  $\lambda = 702_{нм}$  величина  $|n_o - n_e| = 0.0089$ , откуда  $\delta = 32.82 \pm 0.04$ .

Итак, унитарное преобразование (5) обеспечивало набор состояний  $c_{in}(\alpha)$ , который подавался на измерительную часть установки. Восстановление этих состояний и являлось целью настоящей работы.

### **3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ БИФОТОННЫХ СОСТОЯНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ВЗАИМНО-ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

Совокупность взаимно-дополнительных измерений состояния бифотонного поля была реализована в соответствии с томографическим протоколом, представленным Таблице 1. Основная доступная для измерения величина – это интенсивность генерации событий:  $R_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, 9$ . Моменты  $R_\nu$  представляют собой частоты совпадений и измеряются в единицах частоты – Герцах, т.е. соответствуют числу совпадений в единицу времени. Число рассматриваемых событий за любой определенный промежуток времени подчиняется распределению Пуассона. Таким образом, величины  $R_\nu$  задают интенсивности соответствующих взаимно-дополнительных пуассоновских процессов и выступают в качестве оценок параметров Пуассона  $\lambda_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, 9$  (см. ниже).

Интенсивность генерации событий в каждом процессе может быть представлена как квадрат модуля соответствующей амплитуды:

$$\lambda_\nu = M_\nu^* M_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, 9 \quad (7)$$

Амплитуды процессов не могут быть измерены непосредственно, но как раз они и представляют наибольший интерес как величины, описывающие фундаментальные закономерности квантовой физики. Амплитуды связаны линейно с компонентами вектора состояния (принцип суперпозиции). Задача квантовой томографии заключается в том, чтобы, основываясь на экспериментально измеряемых интенсивностях генерации событий, восстанавливать скрытые от непосредственного наблюдения амплитуды процессов и векторы состояний.

Линейное преобразование вектора состояния  $C$  в амплитуду процесса  $M$  задается некоторой матрицей  $X$ , которую легко получить из Таблицы 1.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Тогда, совокупность всех девяти амплитуд процессов может быть выражена одним матричным уравнением

$$Xc = M \quad (9)$$

Матрица  $X$  может быть названа аппаратной матрицей совокупности взаимно-дополнительных измерений (по аналогии с известной аппаратной функцией).

На языке статистики представленное соотношение есть уравнение линейной регрессии. Отличительная особенность рассматриваемой задачи заключается, однако, в том, что в эксперименте приближенно измеряется только абсолютная величина правой части уравнения. Другими словами, нет никакой непосредственной информации о фазах амплитуд процессов (однако, такая информация возникает как результат обработки взаимно-дополнительных измерений).

Оценка абсолютной величины амплитуды дается квадратным корнем из соответствующей экспериментально измеренной частоты совпадений:

$$|M_v|^{\text{exp}} = \sqrt{k_v / t}, \quad (10)$$

где  $k_v$  - число событий (пуассоновская случайная величина), зарегистрированных в  $V$  - ом процессе за время экспозиции  $t$ .

Важно отметить, что, действуя операцией извлечения квадратного корня на пуассоновскую случайную величину, мы получаем случайную величину с однородной дисперсией (стабилизация дисперсии) [6, 15]. Заметим также, что поскольку предметом нашего рассмотрения являются не вероятности, а частоты (интенсивности) событий, удобно использовать ненормированные векторы состояния. Такие векторы позволяют представить частоты совпадений (интенсивности генерации событий) непосредственно по формулам Таблицы 1 без введения коэффициентов, связанных со скоростью генерации бифотонов, эффективностями детекторов и т.п. Размерность определенного таким образом вектора состояния есть  $(1/\text{время}^{1/2})$ . Итоговый вектор состояния, возникающий в результате процедуры восстановления, будем, однако, нормировать на единицу.

Учитывая независимость и одинаковость дисперсии различных  $|M_\nu|^{\text{exp}}$ , можно применить к уравнению (9) стандартную оценку наименьших квадратов [16].

$$\hat{c} = (X^+ X)^{-1} X^+ \hat{M} \quad (11)$$

В отличие от традиционного метода наименьших квадратов полученное соотношение не является явным выражением для оценки вектора состояния  $\hat{c}$ , а представляет собой уравнение, решаемое методом итерации. Модуль величины  $\hat{M}$  известен из эксперимента ( $|\hat{M}_\nu| = |M_\nu|^{\text{exp}}$ ), а ее фаза определяется самой итерационной процедурой (считается что фаза вектора  $X\hat{c}$  на  $i$ -ом итерационном шаге определяет фазу вектора  $\hat{M}$  на  $i+1$ -ом шаге).

Оказывается, что в гауссовском приближении для пуассоновских величин, представленная здесь оценка наименьших квадратов, совпадает с более точной и строгой оценкой максимального правдоподобия, рассмотренной ниже.

#### 4. МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Функция правдоподобия определяется произведением пуассоновских вероятностей:

$$L = \prod_i \frac{(\lambda_i t_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda_i t_i}, \quad (12)$$

где  $k_i$  - число совпадений, наблюдавшееся в  $i$ -ом процессе за время экспозиции  $t_i$ ,  $\lambda_i$  - неизвестные теоретические интенсивности генерации событий (совпадений), оценка которых и является предметом рассмотрения,  $i = 1, 2, \dots, 9$ .

Логарифмическое правдоподобие (логарифм от функции правдоподобия) есть (несущественная константа отброшена):

$$\ln L = \sum_i (k_i \ln(\lambda_i t_i) - \lambda_i t_i) \quad (13)$$

Необходимое условие экстремума  $\frac{\partial \ln L}{\partial c_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3$  дает:

$$\sum_i \left( \frac{k_i}{\lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_j} - t_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_j} \right) = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

Учтем, что  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial c_j} = M_i^* \frac{\partial M_i}{\partial c_j}$  и  $\frac{\partial M_i}{\partial c_j} = X_{ij}$

Тогда, условие экстремума примет вид:

$$\sum_i M_i^* X_{ij} \left( \frac{k_i}{\lambda_i} - t_i \right) = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

Полученное уравнение (фактически система из трех уравнений) автоматически содержит условие нормировки. Действительно, умножая уравнение на  $c_j$  и суммируя по  $j$ , получим искомое условие нормировки в виде:

$$\sum_i k_i = \sum_i (\lambda_i t_i) \quad (14)$$

Полученное условие означает, что полное число зарегистрированных событий во всех процессах равно сумме произведений интенсивностей «рождения» (регистрации) событий на время экспозиции.

Введем матрицы, элементы которых определяются следующими формулами

$$I_{js} = \sum_i t_i X_{ij}^* X_{is} \quad (15)$$

$$J_{js} = \sum_i \frac{k_i}{\lambda_i} X_{ij}^* X_{is} \quad i, s = 1, 2, 3 \quad (16)$$

Матрица  $I$  определяется планом эксперимента и, таким образом, известна априори (до опыта). Она совпадает с так называемой матрицей информации Фишера (см. ниже). Напротив, матрица  $J$  определяется результатами эксперимента ( $k_i$ ), а также неизвестными интенсивностями «рождения» событий ( $\lambda_i$ ).

Посредством введенных матриц уравнение правдоподобия может быть представлено в следующем компактном виде:

$$Ic = Jc, \quad (17)$$

откуда

$$I^{-1}Jc = c \quad (18)$$

Последнее соотношение и будем называть уравнением правдоподобия. Являясь по форме линейным, оно, по существу, является нелинейным уравнением, поскольку параметры  $\lambda_i$ , определяющие матрицу  $J$ , сами зависят от неизвестного вектора состояния  $c$ . Имея простую квазилинейную структуру, полученное уравнение легко решается методом итераций [5-7]. Оператор  $I^{-1}J$  можно назвать квазиединичным (отметим, однако, что как единичный он действует только на один единственный вектор в гильбертовом пространстве, а именно на вектор, дающий решение (18) и представляющий собой максимально правдоподобную оценку вектора состояния). Условие существования матрицы  $I^{-1}$  есть условие, накладываемое на исходный протокол эксперимента.

Очевидно, что излагаемая здесь теория справедлива не только для матрицы  $X$  специального вида (8), но и в общем случае.

Элементы матрицы информации Фишера определяются средним значением от произведения производных функции логарифмического правдоподобия [5-7]

$$I_{sj} = \overline{\frac{\partial \ln L}{\partial c_j} \frac{\partial \ln L}{\partial c_s^*}}, \quad (19)$$

где  $\ln L$  дается формулой (13).

Для производной от функции логарифмического правдоподобия имеем из (13):

$$\frac{\partial \ln L}{\partial c_j} = \sum_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_j} \left( \frac{k_i}{\lambda_i} - t_i \right)$$

Усреднение в (19) будем производить в предположении пуассоновского характера «рождения» (регистрации) событий. Поэтому

$$\begin{aligned} I_{sj} &= \frac{\partial \ln L}{\partial c_j} \frac{\partial \ln L}{\partial c_s^*} = \sum_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_j} \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_s^*} \left( \frac{k_i}{\lambda_i} - t_i \right)^2 \frac{(\lambda_i t_i)^{k_i}}{k_i!} \exp(-\lambda_i t_i) = \\ &= \sum_i \frac{t_i}{\lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_j} \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_s^*} \end{aligned} \quad (20)$$

Выражение для матрицы информации Фишера радикально упрощается, если перейти от частот (интенсивностей) рождения событий к амплитудам процессов:

$$I_{sj} = \sum_i t_i \frac{\partial M_i}{\partial c_j} \frac{\partial M_i}{\partial c_s^*} = \sum_i t_i X_{is}^* X_{ij} \quad (21)$$

Если времена экспозиции для всех процессов одинаковы ( $t_i = t = \text{const}$ ), то

$$I = t(X^+ X) \quad (22)$$

Таким образом, матрица информации Фишера, по- существу, определяется временем наблюдения за квантовым статистическим ансамблем (другими словами, время здесь выступает как наиболее фундаментальная мера информации).

## 5. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Примеры восстановления состояний кутритов методом максимального правдоподобия приведены в Таблице 2

В предпоследней колонке приведены значения параметра согласия  $F$  (fidelity), определяемого соотношением:

$$F = \langle c | \rho | c \rangle \xrightarrow{\text{чистое состояние}} \left| \langle c_{\text{расчет}} | c_{\text{эксперимент}} \rangle \right|^2 \quad (23)$$

и показывающего, в данном случае, меру соответствия теоретического и экспериментального векторов состояния.

Таблица 2

№	угол, град	Число событий	Вектор состояния		$F$ fidelity	$\chi^2$
			Теория	Эксперимент		
1	17,5	2012	0.3094 0.6248 + 0.1921i 0.5713 + 0.3880i	0.3549 0.5620 + 0.2684i 0.5467 + 0.4328i	0.9946	15.925*
2	22,5	1997	0.4702 0.6649 + 0.2368i 0.4105 + 0.3349i	0.4961 0.6444 + 0.2486i 0.4017 + 0.3399i	0.9990	3.6482
3	25	6119	0.5518 0.6548 + 0.2566i 0.3289 + 0.3045i	0.5234 0.6637 + 0.2446i 0.3687 + 0.2997i	0.9979	16.384*
4	27,5	1281	0.6310 0.6248 + 0.2744i 0.2497 + 0.2717i	0.6466 0.6184 + 0.2897i 0.2521 + 0.2281i	0.9976	7.4987
5	30	2245	0.7053 0.5758 + 0.2901i 0.1754 + 0.2368i	0.7266 0.5890 + 0.1900i 0.2224 + 0.1992i	0.9921	26.977*
6	32,5	2753	0.7724 0.5094 + 0.3036i 0.1083 + 0.2002i	0.7953 0.5107 + 0.2519i 0.1217 + 0.1685i	0.9967	11.239

Звездочкой (\*) обозначены значения хи-квадрат экспериментов, превышающие критическое значение 11.345 на уровне достоверности 99%. Для этих экспериментов можно с гарантией 99% утверждать, что неточности установок параметров измерений и их нестабильность являются статистически значимыми. Другими словами, сравнение результатов восстановления с фундаментальным статистическим уровнем точности может служить основой для таких задач как юстировка установки, контроль стабильности ее работы, обнаружение постороннего вмешательства в систему и др.

При малых объемах выборки (временах наблюдения) преобладают статистические погрешности, в то время как при больших – неточности (и нестабильности) установок параметров протокола. В нашем случае объем наблюдений был такой, что существенную роль играли оба указанных выше типа погрешностей (для части экспериментов значения хи-квадрат оказались ниже

критического уровня, а для части – выше). Чем выше объем выборки, при котором еще не проявляются погрешности и нестабильности работы установки, тем выше качество эксперимента (соответствующее количество наблюдений можно назвать объемом когерентности).

Процесс накопления квантовой информации описывается выражениями (21) и (22): по мере увеличения времени измерения (фактически разрушая квантовые состояния все большего числа представителей ансамбля) мы производим все больше и больше информации об изучаемом объекте (при этом статистическая погрешность становится все меньше). Таким образом, только ошибки первого типа (статистические) носят принципиальный (квантовый) характер, в то время как вторые (ошибки установок), по существу, являются классическими: они связаны с неполнотой знаний исследователя (объективно существует более точная информация, просто она не известна экспериментатору).

Процедура приготовления состояний, рассмотренная в разделе 2, предполагает, что в измерительную часть установки попадают чистые состояния вида (2). Тот же вывод можно сделать из анализа результатов: рассматриваемые состояния оказываются с достаточно высокой точностью чистыми. Ограничимся для иллюстрации одним примером. В Таблице 3 для эксперимента №5 ( $30^\circ$ ) из Таблицы 2 приведено сравнение результатов восстановления квантового состояния в приближении чистого состояния с результатами разделения смеси на две компоненты (так называемый квази- байесовский алгоритм [7]). Видно, что оценка чистого вектора состояния очень близка к оценке первой (главной) компоненты матрицы плотности.

Таблица 3.

Приближение чистого состояния	Смесь	
Вектор состояния	Первая компонента (вес=0.9978)	Вторая компонента (вес=0.0022)
0.7266	0.7259	-0.5114 + 0.1649i
0.5890 + 0.1900i	0.5899 + 0.1905i	0.2889 + 0.1543i
0.2224 + 0.1992i	0.2230 + 0.1976i	0.7771 - 0.0097i



## 6. ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена процедура измерения квантовых состояний трехуровневых оптических систем- кутритов, реализованных на частотно- и пространственно-вырожденном бифотонном поле. Развита методология статистического оценивания квантового состояния, включающая решение уравнения правдоподобия и изучение статистических свойств получаемых оценок. На основе экспериментальных данных – измеренных моментов четвертого порядка по полю - и корневого метода оценки квантовых состояний восстановлена исходная волновая функция бифотонов-кутритов. Анализируются неточности установок параметров измерений в тех случаях, когда их нестабильность является статистически значимой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Физика квантовой информации* – сб. под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера М. Постмаркет. 2002.
2. *К.А. Валиев, А.А. Кокин* Квантовые компьютеры: надежды и реальность. Москва-Ижевск. РХД. 2001.
3. *Д.И. Блохинцев* Принципиальные вопросы квантовой механики. М. Наука. 1987.
4. *Н. Бор* Избранные научные труды в двух томах. Т.2. М. Наука. 1971.
5. *Ю.И. Богданов* Основная задача статистического анализа данных: корневой подход. М. МИЭТ. 2002.;  
*Yu. I Bogdanov* Fundamental Problem of Statistical Data Analysis: Root Approach. M. MIEE. 2002.;  
*Yu. I Bogdanov* Statistical Inverse Problem// LANL Report physics/0211109. 2002.
6. *Yu. I Bogdanov* Quantum Mechanical View of Mathematical Statistics // Progress in Quantum Physics Research. Nova Science. NY. 2003; LANL Report quant-ph/0303013. 2003.
7. *Yu. I Bogdanov* Root Estimator of Quantum States // Progress in Quantum Physics Research. Nova Science. NY. 2003; LANL Report quant-ph/0303014.2003.
8. *Ю.И.Богданов, Л.А.Кривицкий, С.П.Кулик* Статистическое восстановление квантовых состояний оптических трехуровневых систем // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 78. №6. с. 804-809.

9. *D.F.James, P.G.Kwiat, W.J.Munro, and A.G.White* Measurement of qubits // *Phys.Rev.A*, 2001. V. 64, 052312.
10. *A.V.Burlakov, D.N.Klyshko, M.V.Chekhova, O.A.Karabutova, and S.P.Kulik* Polarization State of a Biphoton: Quantum Ternaty Logic // *Phys.Rev A*. 1999. V.60, 4209.
11. *H.Bechmann-Pasquinucci and A.Peres*. Quantum Cryptography with 3-State Systems // *Phys.Rev.Lett*. 2000. V. 85. №15. p. 3313-3316.
12. *А.В.Бурлаков, Л.А.Кривицкий, С.П.Кулик, Г.А.Масленников, М.В.Чехова*. Измерение кутритов // *Оптика и спектроскопия*. 2003. Т.94. №5. с. 743-749.
13. *Д.Н. Клышко* Фотоны и нелинейная оптика. М. Наука. 1980.
14. *Л.А. Кривицкий, С.П. Кулик, А.Н. Пенин, М.В. Чехова* Бифотоны как трехуровневые системы: преобразование и измерение // *ЖЭТФ*. 2003. Т.124. вып.4(10). с.804-809.
15. *Г. Крамер* Математические методы статистики. М. Мир. 1975.
16. *М. Кендалл, А. Стьюарт* Статистические выводы и связи. М. Наука. 1973.